

Aufgaben zum Lösen von Bruchgleichungen

1.0 Bestimmen Sie die Definitions- und die Lösungsmenge.

1.1 $\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x} = -1$ ☒

1.2 $\frac{0,4}{3x} + \left(\frac{0,1}{x} - \frac{1,5}{4}\right) \cdot 2 = 0$ ☒

1.3 $\frac{x^2-4}{3x} - \frac{2-x}{3} = \frac{2x}{3} - \frac{4}{x}$ ☒

1.4 $\frac{1}{x-2} = \frac{2}{x^2-2x}$ ☐

1.5 $\frac{x+8}{3x+3} + \frac{x+2}{2x+2} = 1$ ☒

1.6 $\frac{2x-30}{x+3} - 2 = 6 \cdot \frac{x+3}{x^2-9}$ ☒

1.7 $\frac{x^2+3x+4}{x^2+3x+2} = 1$ ☐

1.8 $\frac{x+1}{x-1} - \frac{3}{x-1} = 1$ ☒

2.0 Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie folgende Gleichungen durch Überkreuzmultiplikation.

2.1 $\frac{x}{x+2} = \frac{2x}{2x+9}$ ☐

2.2 $\frac{x+6}{x} = \frac{x+4}{x+1}$ ☐

2.3 $\frac{x}{x-7} = \frac{x+5}{x-3}$ ☐

2.4 $\frac{3x+2}{3x-1} = \frac{6x}{6x-1}$ ☐

2.5 $\frac{2}{x-1} = x$ ☒

2.6 $\frac{2x+1}{3x-4} = \frac{x+6}{4x+1}$ ☒

3 Ich denke mir eine Zahl. Addiere ich sie zum Nenner von $\frac{3}{5}$, so erhalte ich insgesamt das Doppelte der entstehenden Kehrzahl.
Ermitteln Sie die Zahl. ☒

4 Der Zähler eines Bruchs ist um 1 größer als der Nenner. Subtrahiert man von ihm die Zahl $\frac{3}{2}$, so entsteht der Kehbruch des Ausgangsbruchs.
Bestimmen Sie den Ausgangsbruch. ☒

5 Lothar macht eine 30 km Wanderung. Da er sportlich ist, joggt er die ersten 12 Kilometer sogar. Dabei ist er doppelt so schnell wie beim Gehen. Lothar macht keine Pausen und kommt nach 5 h 20 min ins Ziel an.
Berechnen Sie Lothars Geschwindigkeit beim Gehen. ☒

- 6 Aus 210 Liter 80 %igem Spiritus soll Spiritus von 70 % hergestellt werden. Bestimmen Sie, wie viel Wasser hinzu gegossen werden muss. 
- 7 Ein Schwimmbecken kann durch zwei Zuleitungen gefüllt werden. Sind beide geöffnet, so dauert die Füllung 6 Stunden. Die zweite Zuleitung würde allein zu Füllung 16 Stunden mehr benötigen als die erste. Berechnen Sie, wie viele Stunden jede Zuleitung alleine braucht. 
- 8 Jemand kauft Schrauben für sechs Euro. Hätte er das Sonderangebot der vorigen Woche ausgenutzt, so hätte er für das gleiche Geld 100 Stück mehr erhalten und dabei 0,01 € pro Stück erspart. Bestimmen Sie, wie viele Schrauben er gekauft hat. 

9.0 Bei Parallelschaltung zweier Widerstände R_1 und R_2 berechnet sich der

Ersatzwiderstand R gemäß $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

9.1 Zeigen Sie, dass sich diese Gleichung auch umformen lässt zu: $R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$. 

9.2 Zwei Widerstände $R_1 = 20 \Omega$ und $R_2 = 50 \Omega$ werden parallel geschaltet.

Berechnen Sie den Ersatzwiderstand R . 

9.3 Bestimmen Sie, welcher Widerstand R_2 zum Widerstand $R_1 = 100 \Omega$ parallel geschaltet werden muss, damit die Parallelschaltung einen Ersatzwiderstand von $R = 50 \Omega$ besitzt. 

Lösungen

1.1

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

$$\frac{1+x-x^2}{x \cdot (1+x)} = -1 \Rightarrow 1+x-x^2 = -x-x^2 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2} \Rightarrow IL = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

1.2

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{0,4}{3x} + \frac{0,2}{x} - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \frac{0,4+3 \cdot 0,2}{3x} = \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{3x} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4 = 9x \Rightarrow x = \frac{4}{9} \Rightarrow IL = \left\{\frac{4}{9}\right\}$$

1.3

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\frac{x^2-4}{3x} + \frac{4}{x} = \frac{2x}{3} + \frac{2-x}{3} \Rightarrow \frac{x^2-4+12}{3x} = \frac{x+2}{3} \Rightarrow \frac{x^2+8}{3x} = \frac{x+2}{3} \\ \Rightarrow 3x^2+24=3x^2+6x \Rightarrow 6x=24 \Rightarrow x=4 \Rightarrow IL = \{4\}$$

1.4

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$$

$$x^2-2x=2x-4 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2 \Rightarrow IL = \{ \}$$

1.5

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$\frac{x+8}{3x+3} = 1 - \frac{x+2}{2x+2} \Rightarrow \frac{x+8}{3x+3} = \frac{2x+2-x-2}{2x+2} \Rightarrow \frac{x+8}{3x+3} = \frac{x}{2x+2} \\ \Rightarrow 3x^2+3x=2x^2+18x+16 \Rightarrow x^2-15x-16=0 \Rightarrow x_1=16 \quad x_2=-1 \Rightarrow IL = \{16\}$$

1.6

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

$$\frac{2x-30-2x-6}{x+3} = \frac{6x+18}{x^2-9} \Rightarrow \frac{-36}{x+3} = \frac{6x+18}{x^2-9} \Rightarrow -36x^2+324=6x^2+36x+54$$

$$\Rightarrow -42x^2-36x+270=0 \Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=\frac{15}{7} \Rightarrow IL = \left\{\frac{15}{7}\right\}$$

1.7

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2; -1\} \quad x^2+3x+2 = (x+1) \cdot (x+2)$$

$$x^2+3x+4 = x^2+3x+2 \Rightarrow 4=2 \text{ (f)} \Rightarrow IL = \{ \}$$

1.8

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\frac{x+1-3}{x-1} = 1 \Rightarrow x-2 = x-1 \Rightarrow -2 = -1 (f) \Rightarrow IL = \{ \}$$

2.1

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-4, 5; -2\}$$

$$2x^2 + 9x = 2x^2 + 4x \Rightarrow 5x = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow IL = \{0\}$$

2.2

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$$

$$x^2 + 7x + 6 = x^2 + 4x \Rightarrow 3x = -6 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow IL = \{-2\}$$

2.3

$$D = \mathbb{R} \setminus \{3; 7\}$$

$$x^2 - 3x = x^2 - 2x - 35 \Rightarrow -x = -35 \Rightarrow x = 35 \Rightarrow IL = \{35\}$$

2.4

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{6}; \frac{1}{3} \right\}$$

$$18x^2 + 9x - 2 = 18x^2 - 6x \Rightarrow 15x = 2 \Rightarrow x = \frac{2}{15} \Rightarrow IL = \left\{ \frac{2}{15} \right\}$$

2.5

$$D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$2 = x^2 - x \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 2 \Rightarrow IL = \{-1; 2\}$$

2.6

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{4}; \frac{4}{3} \right\}$$

$$8x^2 + 6x + 1 = 3x^2 + 14x - 24 \Rightarrow 5x^2 - 8x + 25 = 0 \Rightarrow IL = \{ \}$$

3

$$\frac{3}{5+x} = 2 \cdot \frac{5+x}{3} \Rightarrow \frac{3}{5+x} = \frac{10+2x}{3} \Rightarrow 9 = 2x^2 + 20x + 50$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 20x + 41 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{4+3\sqrt{2}}{2} \quad x_2 = \frac{4-3\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Die Zahlen lauten } x = -\frac{10+3\sqrt{2}}{2} \text{ und } x = \frac{-10+3\sqrt{2}}{2}.$$

4

$$\frac{x+1}{x} - \frac{3}{2} = \frac{x}{x+1} \Rightarrow \frac{x+1}{x} - \frac{x}{x+1} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{(x+1)^2 - x^2}{x \cdot (x+1)} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{2x+1}{x \cdot (x+1)} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 4x+2 = 3 \cdot x \cdot (x+1) \Rightarrow 3x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -\frac{2}{3}$$

Die Ausgangsbrüche lauten: $\frac{2}{1} = 2$ und $-\frac{1}{2}$.

5

$$\frac{12}{2x} + \frac{18}{x} = 5\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{12+36}{2x} = \frac{16}{3} \Rightarrow \frac{48}{2x} = \frac{16}{3} \Rightarrow 144 = 32x \Rightarrow x = 4,5$$

Lothars Geschwindigkeit beim Gehen beträgt 4,5 km/h.

6

$$0,8 \cdot 210 + 0 \cdot x = 0,7 \cdot (210 + x) \Rightarrow 168 = 147 + 0,7x \Rightarrow 0,7x = 21 \Rightarrow x = 30$$

Es muss noch 30 Liter Wasser hinzu gegossen werden.

7

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x+16} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{x+16+x}{x \cdot (x+16)} = \frac{1}{6} \Rightarrow \frac{2x+16}{x \cdot (x+16)} = \frac{1}{6} \Rightarrow 12x+96 = x^2 + 16x$$

$$\Rightarrow x^2 + 4x - 96 = 0 \Rightarrow x_1 = 8 \quad x_2 = -12$$

Die erste Zuleitung benötigt allein acht Stunden und die zweite Zuleitung 24 Stunden.

8

$$\frac{6}{x} = \frac{6}{x+100} + 0,01 \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{6+0,01x+1}{x+100} \Rightarrow \frac{6}{x} = \frac{7+0,01x}{x+100}$$

$$\Rightarrow 6x+600 = 7x+0,01x^2 \Rightarrow 0,01x^2 + x - 600 = 0 \Rightarrow x_1 = 200 \quad x_2 = -300$$

Er hat 200 Schrauben gekauft.

$$9.1 \quad \frac{1}{R} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \cdot R_2} \Rightarrow R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

$$9.2 \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{20} + \frac{1}{50} = \frac{7}{100} \Rightarrow R = \frac{100}{7} \Omega$$

$$9.3 \quad 50 = \frac{100 \cdot R_2}{100 + R_2} \Rightarrow 5000 + 50 \cdot R_2 = 100 \cdot R_2 \Rightarrow 50 \cdot R_2 = 5000 \Rightarrow R_2 = 100 \Omega$$